ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Как уже отмечалось выше во «Введении» это пособие не предназначено для глубокого изучения основ математики, в частности математической логики и теории множеств. Тем не менее, изложенного здесь материала по этим разделам математики вполне достаточно для будущих инженеров почти по всем техническим специальностям, в том числе по математическому и компьютерному моделированию.

1 МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ

2 БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ВАЖНЕЙШИЕ ТИПЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

3 БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ КАК БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

См. лекции № 1-3

4 ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Мы рассмотрели алгебру высказываний. Это было содержательное рассмотрение, ещё такие рассмотрения называют *семантическими* (т.е. смысловыми). Попытаемся теперь описать её с формальной точки зрения, дав понятие формальной теории, т.е. сделав *синтаксическое* рассмотрение (т.е. «правописательное»).

4.1 Формальные теории

4.1.1 Среди формальных теорий наиболее важным является класс формальных теорий, называемых *аксиоматическими* (или *дедуктивными*). Их рассмотрением мы и ограничимся.

Для аксиоматических теорий характерен следующий порядок выделения «истинных» формул:

а) построение формальной теории начинают с выделения множества знаков, составляющих её *алфавит*;

б) затем указывают правила, по которым будут строиться *формулы* (правильные построенные выражения) теории; т.е. выделяются конечные последовательности символов алфавита, построенные по определённым правилам. В некоторых формальных теориях наряду с формулами, в качестве правильных построенных выражений, рассматриваются также и *термы* (т.е. блоки для построения формул; в программировании – это то, что называют арифметическими выражениями), и *секвенции* (конечные последовательности формул) и т.п. объекты;

в) выделяется некоторое подмножество формул (или секвенций), называемых *аксиомами теории*;

г) указывается множество отношений между формулами (или секвенциями); эти отношения называются *правилами вывода*;

д) правила вывода ставят в соответствие некоторым конечным последовательностям формул (или секвенций) новые формулы (или секвенции); с помощью этих правил из аксиом получаются новые «истинные» формулы (или секвенции) – *теоремы* данной *формальной теории* или *исчисления*.

Формальная теория (или *исчисление)* – это множество всех формул формального языка с выделенным в нем подмножеством формул (или секвенций), называемых «истинными» – теоремами. Теория, в которой не все формулы (или секвенции) истинны, называется *непротиворечивой* (см. также п. 3.3.5).

Обычно теоремы, определяются в аксиоматических теориях следующим образом.

Доказательством (или *выводом*) называется конечная последовательность формул (или секвенций) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такая, что каждая A_i есть либо аксиома теории, либо получена из предыдущих формул (или секвенций) по одному из правил вывода.

Теоремой называется такая формула (или секвенция) A данной теории, что существует доказательство, в котором последней формулой (или секвенцией) является именно эта A.

Обратите внимание, что в математической логике слова «доказательство», «теорема», «вывод» используются как термины, т.е. они имеют ровно тот смысл, что заложен в их определения.

4.1.2 Аксиоматическая теория *полна* (в смысле Поста), если присоединение к ее аксиомам формулы, не являющейся теоремой, при сохранении неизменными правил вывода, делает теорию противоречивой.

Чтобы установить связь между формальной теорией и какой-либо конкретной содержательной теорией, нужно решить вопрос об *интерпретации* формальной теории в содержательную. Говорят, что существует интерпретация формальной теории в содержательную, если существует соответствие между формулами (или секвенциями) формальной теории и объектами – утверждениями содержательной теории. Интерпретация называется *правильной*, если каждой теореме формальной теории ставится в соответствие истинное утверждение содержательной теории. Интерпретация называется *адекватной* (иногда *полной*), если она правильная и каждому истинному утверждению содержательной теории ставится в соответствие теорема формальной теории (т.е. существует взаимно однозначное соответствие между утверждениями содержательной теории и теоремами формальной теории).

Отметим, что довольно часто формальную теорию называют *полной*, если для неё существует адекватная интерпретация в некоторую содержательную теорию.

Теперь, прежде чем перейти к рассмотрению некоторых формальных логических теорий, сделаем следующее замечание. Для того чтобы ввести формальный язык, мы должны пользоваться каким-то естественным языком, (например, русским, казахским, английским или каким-то другим) дополненным некоторыми символами. Этот язык мы будем называть *метаязыком*, в отличие от первого (т.е. формального языка), который называют *языком-объектом*.

В метаязыке доказывают некоторые утверждения формальной теории, их относят к *метатеории*. Поэтому следует различать употребление слов «доказательство» и «теорема» в формальном языке (языке-объекте) и в метаязыке.

В математике существует термин «исчисление». Он имеет два смысла.

В первом смысле (широком) исчисление – составная часть названия некоторых разделов математики, трактующих правила вычислений и оперирования с объектами того или иного типа, например, интегральное исчисление, вариационное исчисление и т.д.

Во втором смысле (узком) исчисление – дедуктивная система, т.е. способ задания того или иного множества путем указания исходных элементов (аксиом исчисления) и правил вывода, каждое из которых описывает, как строить новые элементы из исходных и уже построенных.

4.2 Исчисление высказываний как формальная теория

4.2.1 Построение формальной аксиоматической теории для алгебры высказываний называется *исчислением высказываний*. Опишем его, придерживаясь схемы построения из п. 4.1.1.

а) Исходными символами или алфавитом исчисления высказываний являются:

1) бесконечное число пропозициональных переменных – $X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, X_3, \ldots$;
2) четыре символа логических операций – $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$;
3) скобки – (,).

б) Определим формулы исчисления высказываний.

1) Пропозициональная переменная – формула.
2) Если φ и ψ – формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg \varphi$ – формулы.
3) Никаких других формул кроме выделенных согласно п.п. 1 и 2 нет (кратко: «других формул – нет»).

в) Исчисление высказываний будем базировать на бесконечном числе аксиом. Поскольку бесконечное число аксиом полностью записать нельзя, выпишем так называемые *схемы аксиом*, а конкретная аксиома получается из какой-то схемы подстановкой вместо букв A, B и C в схему произвольных формул. Для удобства восприятия внешние скобки опущены.

A_1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
A_2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
A_3) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$.
A_4) $(A \wedge B) \rightarrow A$.
A_5) $(A \wedge B) \rightarrow B$.
A_6) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$.
A_7) $A \rightarrow (A \vee B)$.
A_8) $B \rightarrow (A \vee B)$.
A_9) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.
A_{10}) $\neg\neg A \rightarrow A$.
A_{11}) $A \rightarrow \neg\neg A$.

Каждая аксиомная схема представляет собой бесконечное число аксиом после замены A, B, C на произвольные формулы исчисления высказываний.

г) Введем только одно правило вывода (а точнее, одну схему правил вывода), с помощью которого из формул φ и $\varphi \rightarrow \psi$ получаем новую формулу ψ. Это правило называется *правилом отсечения* (в силу традиции, его обычно пишут по латыни: *modus ponens*, сокращенно – *MP*). Для удобства восприятия это правило (и другие тоже) часто записывают в «два этажа»:

$$\frac{\varphi, \quad \varphi \to \psi}{\psi} - MP$$

д) Пользуясь аксиомами и правилом *MP*, мы можем строить доказательства и получать новые «истинные» формулы – теоремы, как это описано в п. 4.1.1.

4.2.2 Примеры теорем исчисления высказываний.

Пример 4.1 Покажем, что $X \to X$ – теорема. Для этой цели построим доказательство, т.е. последовательность формул, последней в которой должна быть формула $X \to X$:

1) $(X \to (\neg\neg X \to X)) \to ((X \to \neg\neg X) \to (X \to X))$ (по схеме A_2, где A заменено на X, B – на $\neg\neg X$, C – на X);

2) $X \to (\neg\neg X \to X)$ (по схеме A_1);

3) $(X \to \neg\neg X) \to (X \to X)$ (из 2) и 1) по правилу *MP*);

4) $X \to \neg\neg X$ (по схеме A_{11});

5) $X \to X$ (из 4) и 3) по правилу *MP*);

По определению доказательства и теоремы $(X \to X)$ есть теорема.

Пример 4.2 Покажем, что $(X \wedge Y) \to (Y \wedge X)$ – теорема.

Соответствующая последовательность формул описана ниже:

1) $((X \wedge Y) \to Y) \to (((X \wedge Y) \to X) \to ((X \wedge Y) \to (Y \wedge X)))$ (по схеме A_3: A заменяем $X \wedge Y$, B – на Y, C – на X);

2) $(X \wedge Y) \to Y$ (по схеме A_5);

3) $((X \wedge Y) \to X) \to ((X \wedge Y) \to (Y \wedge X))$ (из 1), 2) по правилу *MP*);

4) $((X \wedge Y) \to X)$ (по схеме A_4);

5) $(X \wedge Y) \to (Y \wedge X)$ (из 3), 4) по правилу *MP*).

4.2.3 Исследуем некоторые свойства построенного исчисления высказываний. Будем интерпретировать исчисление высказываний в алгебру высказываний, ставя в соответствие каждой формуле исчисления высказываний аналогичную формулу алгебры высказываний. Можно показать, что такая интерпретация адекватна. Покажем только правильность интерпретации.

Теорема 4.1 *Всякая теорема исчисления высказываний является тавтологией алгебры высказываний*.

Доказательство проведём индукцией по длине вывода (доказательства) теоремы в исчислении высказываний.

Пусть φ_n – теорема, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – ее вывод (доказательство). При $n=1$ теорема φ_n есть аксиома. Непосредственной проверкой (построением таблиц истинности) проверяется, что любая аксиома является тавтологией. Индуктивный шаг следует из того, что правило вывода *MP*, примененное к тавтологиям, приводит к тавтологии.

Эта теорема доказывает правильность интерпретации.

Относительно исчисления высказываний можно показать его полноту (в обоих смыслах, т.е. по Посту и в смысле адекватности), *разрешимость* и *непротиворечивость*.

Непротиворечивость – свойство аксиоматической теории, состоящее в том, что в этой теории нельзя получить противоречие, т.е. доказать некоторое предложение вместе с его отрицанием. Это строгое математическое определение непротиворечивости теории, а в обыденном понимании оно несколько шире – это невозможность доказать в данной теории некоторое заведомо абсурдное утверждение.

Для широкого класса аксиоматических теорий непротиворечивость имеет место тогда и только тогда, когда существует предложение, формулируемое в данной теории и недоказуемое в ней (см. п. 4.1.1).

Теорема 4.2 *Исчисление высказываний непротиворечиво.*

Доказательство. Всякая теорема исчисления высказываний является тавтологией согласно теореме 4.1. Отрицание теоремы тождественно ложно в алгебре высказываний и значит, не является теоремой исчисления высказываний.

Теорема 4.3 *Всякая тавтология алгебры высказываний является теоремой исчисления высказываний.*

Доказательство этой теоремы довольно сложное. Любопытный читатель сможет с ним ознакомиться по книгам [11,16,23] для других формализаций исчисления высказываний.

Следствие 4.1 (адекватность (полнота) исчисления высказываний). *Множество доказуемых в исчислении высказываний формул (теорем) совпадает с множеством тавтологий.*

Следствие 4.2 (разрешимость исчисления высказываний). *Исчисление высказываний разрешимо, а именно, имеется алгоритм, который по любой формуле этого исчисления определяет, является ли она теоремой.*

Доказательство. Достаточно рассматривать данную формулу как формулу алгебры логики и построением её таблицы истинности проверить является ли она тавтологией.

Теорема 4.4 (о полноте по Посту исчисления высказываний). *Пусть* $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ *– формула, не являющаяся теоремой. Теория, которая получается из исчисления высказываний добавлением в качестве аксиом всех формул, получающихся из* $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ *заменой переменных высказываний на произвольные формулы, противоречива.*

Доказательство этой теоремы опущено за недостатком места.

4.3 Другие формализации исчисления высказываний

Описанная выше формализация исчисления высказываний – не единственно возможная. Для различных целей, как теоретического плана, так и вызванных практическими нуждами, построено очень много формальных исчислений. В последние десятилетия одним из направлений подобных приложений формальных логических исчислений является создание языков *функционального* и особенно *логического программирования*, например, таких как Ява и Пролог. Отметим, что для всех этих формальных исчислений сохраняются свойства, перечисленные в теоремах 4.1-4 и следствиях 4.1, 4.2 для системы A, описанной в п. 4.2.1. Ниже приводятся некоторые из них, созданные в разное время, разными математиками для почти всех естественных полных наборов логических связок.

4.3.1 В разделе 7 мы познакомимся с *п о л н ы м и* системами логических связок (булевых функций), т.е. с такими наборами связок, что любая другая связка выразима формулой, в записи которой участвуют только связки из данной системы. Интуитивно понятно, что набор из четырёх классических связок $\wedge, \vee, \to, \neg$ является полным. Очевидно также, что если к полной системе связок добавить ещё какие-то связки, то полнота сохранится. Далее в разделе 7 мы научимся определять полноту набора.

Все нижеследующие варианты исчисления высказываний строятся по тому же плану, что описан в п. 4.1.1, и более того, они от варианта п. 4.2.1 отличаются лишь в двух моментах: определениями формул и системой аксиом. В частности, у всех них по сути одно и то же правило вывода – *m o d u s p o n e n s* (или *MP*), которое записанное в «два этажа» имеет вид:

$$\frac{\varphi, \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \text{ – } modus\ \ ponens.$$

4.3.2 *Система С. Клини* (1952 г. [16]). Иногда (см., например, [24]) её или её аналог [11] записывают только для классического набора из четырёх связок – $\neg, \wedge, \vee, \to$. Тогда достаточно десяти аксиом:

K_1 $A \to (B \to A)$;

K_2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

K_3 $(A \wedge B) \to A$;

K_4 $(A \wedge B) \to B$;

K_5 $A \to (B \to (A \wedge B))$;

K_6 $A \to (A \vee B)$;

K_7 $B \to (A \vee B)$;

K_8 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;

K_9 $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;

K_{10} $\neg\neg A \to A$.

Однако сам С. Клини рассматривал наряду с этой также и формализацию для системы из пяти логических связок – $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$. В этом случае к аксиомам K_1 – K_{10} необходимо добавить ещё три аксиомы, которыми описываются свойства эквиваленции:

K_{11} $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \sim B);$
K_{12} $(A \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B);$
K_{13} $(A \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A).$

4.3.3 *Система* L. Эта система достаточно часто описывается в учебниках ввиду своей простоты [23,24]. К её недостаткам следует отнести то, что она оперирует с полным набором, состоящим всего из двух связок – $\neg$ и $\rightarrow$. Поэтому произвести в этой системе запись утверждений, которые сформулированы в естественном языке, – дело более сложное, чем в системах Клини или системе A из подраздела 4.2.1.

Здесь всего три аксиомы:

L_1 $A \rightarrow (B \rightarrow A);$
L_2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$
L_3 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B).$

4.3.4 *Система Гильберта и Аккермана* (1938 г. [24]). Эта система оперирует тоже с двумя связками – $\neg$ и $\vee$, которые образуют полный набор.

Здесь всего четыре аксиомы:

GA_1 $\neg (A \vee A) \vee A;$
GA_2 $\neg A \vee (A \vee B);$
GA_3 $\neg (A \vee B) \vee (B \vee A);$
GA_4 $\neg(\neg B \vee C) \vee (\neg(A \vee B) \vee (A \vee C)).$

Естественно, что правило вывода *modus ponens* здесь приобретает вид:

$$\frac{\varphi, \qquad \neg\varphi \;\vee\; \psi}{\psi} - \textit{modus ponens}.$$

4.3.5 *Система Россера* (1953 г. [24]). Эта система оперирует с полным набором из двух связок $\neg$ и $\wedge$. В ней тоже три аксиомы:

R_1 $\neg(A \wedge \neg(A \wedge A));$
R_2 $\neg((A \wedge B) \wedge \neg A)$
R_3 $\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg\neg(\neg(B \wedge C) \wedge \neg\neg(C \wedge A))).$

Правило вывода *modus ponens* здесь приобретает вид:

$$\frac{\varphi, \qquad \neg\ (\varphi\ \wedge\ \neg\psi\,)}{\psi} - \textit{modus ponens}.$$

4.3.6 *Система Никода* (1917 г. [24]). Здесь всего одна связка – так называемый *штрих Шеффера* |, который в одиночку(!) образует полный набор (см. пп. 4.1.3 и 6.3.3). Соответственно, раз связок мало, то аксиом для описания их нужно тоже мало, в данном случае достаточно всего одной:

$N_1 \ (A|(B|C))|((D|(D|D))|((E|B)|((A|E)|(A|E))))$.

Правило вывода *modus ponens* здесь приобретает совсем экзотичный вид:

$$\frac{\varphi, \quad \varphi|\ (\psi\ \ |\ \ \chi)}{\chi}$$ – аналог *modus ponens*.

Неформально $A \mid B$ можно понимать как сокращение для формулы $\neg A \vee \neg B$ или для $\neg(A \wedge B)$.

4.3.7 С другой стороны, довольно часто при работе с системами, имеющими малое число связок, наоборот вводят привычные связки для сокращения записи и улучшения восприятия. Например, для систем Гильберта-Аккермана и Россера полагают, что $A \to B$ – это $\neg A \vee B$ и $\neg(A \wedge \neg B)$, соответственно.

Упражнение 4.1 *Запишите аксиомы систем Гильберта-Аккермана и Россера, используя импликацию для сокращения.*

При работе с формальными исчислениями часто используют *допустимые* (или *производные*) *правила вывода*, т.е. такие правила, добавление которых в исчисление не расширяет список теорем.

Упражнение 4.2 *Обоснуйте допустимость для систем* L *и клиниевской следующих правил вывода:*

1) $\dfrac{\varphi}{\psi \to \varphi}$ *– правило введения импликации;*

2) $\dfrac{\varphi, \quad \psi \to (\varphi \to \chi)}{\psi \to \chi}$ *– правило сечения;*

3) $\dfrac{\varphi \to \psi, \quad \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$ *– правило транзитивности или гипотетический силлогизм;*

4) $\dfrac{\varphi \vee \psi, \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ *– правило слияния;*

5) $\dfrac{\varphi \vee \psi, \quad \neg\varphi}{\psi}$ *– дизъюнктивный силлогизм;*

6) $\dfrac{\varphi \oplus \psi, \quad \varphi}{\neg\psi}$ *– разделительный силлогизм (альтернативный);*

связка $\oplus$ *неформально означает разделительное «или», её определение см. в п. 5.1.3;*

7) $\dfrac{\varphi \to \psi, \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$ *– правило рассуждения от противного (modus tollens);*

8) $\dfrac{\varphi \vee X, \quad \psi \vee \neg X}{\varphi \vee \psi}$ *– правило резолюций, где* X *– произвольная пропозициональная переменная.*

Упражнение 4.3 *Почему нельзя правило резолюций обобщить на случай, когда* X *– произвольная формула?*

Отметим, что некоторые из этих правил способны заменить собой правило *modus ponens,* и более удобны для построения на их основе языков *логического программирования*. Например, правило резолюций положено в основу весьма распространенного языка *Пролог* и некоторых других.

4.3.8 Очень интересными формализациями исчисления высказываний являются *исчисление высказываний в форме секвенций* и *система натурального вывода*. Там, наоборот, много правил вывода (при классическом наборе из четырёх логических связок – целых 12), но всего лишь одна схема аксиом. К достоинствам этих систем следует отнести то, что в них можно относительно просто научиться строить формальные доказательства. С исчислением высказываний и предикатов в форме секвенций можно ознакомиться, например, по учебнику [11].

Мы бегло рассмотрели случай классической двухзначной математической логики. Разумеется, математиками исследованы также и многозначные логики. Например, неплохо изучены трёхзначные логики, где наряду со значениями «истинно» и «ложно», можно, допустим, взять ещё и «не знаю» или «непонятно» (а это – не одно ли и то же?). Читателям, заинтересовавшимся такими логиками можно порекомендовать книги [15,31].

Однако заметим, что нового на этом пути мы получим не так уж много. Дело в том, существует единый способ преобразования любой формулы многозначной логики в систему функций двухзначной логики [30,31]. Естественно, что получающаяся при этом система весьма громоздка, но принципиально вопрос, решаемый многозначной логикой может быть сведён к совокупности вопросов в двухзначной.

Гораздо более интересная картина получается, если часть аксиом исчисления высказываний заменяется более слабыми или когда добавляют так называемые *модальности*, вроде «возможно», «необходимо» или нечто подобное, а также аксиомы, описывающие их свойства, и правила вывода, задающие порядок оперирования с ними. Таким образом получаются различные *интуиционистские*, *конструктивные*, *модальные* и прочие неклассические логики, в том числе и *нечёткая*.